FORMVLAE GENERALES PRO TRANSLATIONE QVACVNQVE CORPORVM RIGIDORVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Quando corporis cuiusque rigidi motum determinari oportet, tota inueftigatio commode in duas partes diftinguitur, alteram geometricam, alteram mechanicam. In priore enim parte fola translatio corporis ex dato fitu in alium quemcunque fine vllo refpectu habito ad motus principia per formulas analyticas repraefentari debet, quarum ope pofitio fingulorum punctorum poft translationem ex earum pofitione initiali definiri queat; quae ergo inueftigatio vnice ad Geometriam vel potius ad Stereometriam eft referenda. Facile autem intelligitur, fi ifta inueftigatio ab altera, quae proprie ad Mechanicam pertinet, feparetur, tum ipfam motus determinationem ex principiis motus multo facilius expediri poffe, quam fi vtraque inueftigatio coniunctim fufcipiatur. Cum igitur in tractatu meo de motu corporum rigidorum hanc vtramque inueftigatiogationem ſimul ſuſcepiſſem, vnde tota tractatio non parum moleſta et intricata eſt reddita: hoc loco ſolam partem geometricam accuratius euoluere conſtitui, quo deinceps pars mechanica faciliori negotio expediri poſſit.

§. 2. Vt igitur primo ſitum initialem corporis rigidi accurate definiam, poſitionem ſingulorum eius punctorum more ſolito per ternas coordinatas inter ſe normales repraeſentari conueniet. Hunc
Tab. II. Fig. 1. in finem conſtituo ternos axes fixos IA, IB et IC ſe inuicem in puncto I normaliter ſecantes, quorum bini I A et I B in ipſo plano tabulae ſint ſiti, tertius vero I C hinc plano perpendiculariter inſiſtat. Nunc conſidero punctum corporis quodcunque Z, ex quo ad planum A I B demittatur perpendiculum Z S; tum vero ex puncto S ad axes I A et I B ducantur normales S P et S Q, ac vocemus coordinatas $IP = QS = p$, $PS = IQ = q$ et ipſum perpendiculum $SZ = r$, cui in axe I C aequalis capiatur portio $IR = r$; ita vt punctum Z reperiatur in diagonali I Z parallelepipedi rectanguli, quod ex lateribus I P, I Q et I R formatur. Hoc igitur modo poſitio ſingulorum corporis punctorum commodiſſime per ternas coordinatas p, q, r, determinabitur.

§. 3. Quo autem deinceps facilius iſta repraeſentatio ad inueſtigationem mechanicam accommodari poſſit, punctum I aptiſſime accipitur in ipſo centro grauitatis ſeu potius inertiae corporis rigidi propo-

propositi; sic enim istud insigne commodum impetramus, vt posita massula corporis in Z existentis $= dM$, per totam corporis extensionem fiat

$1^\circ.\ \int p\,dM = 0.\quad 2^\circ.\ \int q\,dM = 0.\quad 3^\circ.\ \int r\,dM = 0$

siquidem haec integralia per totum corpus extendantur. Praeterea vero maximam vtilitatem afferet, si terni axes IA, IB, IC in ipsis axibus corporis principalibus constituantur; tum enim etiam valores trium sequentium formularum integralium pariter per totum corpus extensi nihilo aequales reddentur, quippe quae sunt

$4^\circ.\ \int pq\,dM = 0.\quad 5^\circ.\ \int pr\,dM = 0.\quad 6^\circ.\ \int qr\,dM = 0$

haecque tantum hic in transitu notasse iuuabit, quandoquidem pars geometrica ab istis aequationibus neutiquam pendet.

§. 4. Iam facta quacunque corporis translatione consideremus primo locum i, in quem punctum corporis I fuerit translatum, pro quo vocemus coordinatas $If = f$, $fg = g$ et $gi = h$; tum vero punctum Z ex situ initiali translatum sit in z, pro quo statuamus coordinatas $Ix = x$, $xy = y$ et $yz = z$, ac primo quidem statim manifestum est, distantiam iz etiamnunc aequalem esse debere distantiae IZ, qua, cum esset $\sqrt{pp+qq+rr}$, nunc vero sit

$$iz = \sqrt{(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2}$$

habebimus hanc aequationem:

$$pp+qq+rr = (x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2.$$

Praeterea vero necesse est, vt distantiae inter bina corpo-

corporis puncta quaecunque in situ translato etiamnunc aequales sint distantiis eorundem punctorum in situ initiali, cui conditioni sequenti modo satisfaciemus.

§. 5. Sumamus punctum z in eo loco, in quem punctum P ex statu initiali fuerit translatum: hic enim non consultum videtur figuram nostram tot nouis lineis ducendis onerare. Deinde etiam in ipso statu initiali punctum Z vbicunque libuerit accipi potest; vnde si punctum Z in puncto P accipiatur, etiam punctum z in situ translato locum ipsi P respondentem exhibebit.

§. 6. Cum igitur punctum Z in punctum P incidat, si fiat $q = 0$ et $r = 0$, quoniam in genere ternas coordinatas x, y, z tanquam certas functiones ipsarum p, q et r considerare licet, quomodocunque hae functiones fuerint comparatae, si in iis faciamus $q = 0$ et $r = 0$ hae coordinatae necessario tales formas accipere debebunt:

$$x = f + Fp, \quad y = g + Gp, \quad z = h + Hp.$$

Quia enim ponimus $q = 0$ et $r = 0$ spectata p vt variabili, coordinatae x, y, z ostendere debent situm in quem linea recta IP fuerit translata; quae cum sit recta, ea in situ translato erit linea recta ipsi aequalis, ideoque coordinatae x, y, z positionem huius lineae rectae iz exprimere debent, vnde, cum sumto $p = 0$ etiam punctum z in i incidere debeat, euidens est, quantitates x, y, z ita per variabilem p definiri debere, vt posito $p = 0$ fiat $x = f$, $y = g$ et $z = h$. Tum vero quia aequatio debet esse pro linea

linea recta, aliae formae locum habere nequeunt, nisi quas statuimus: scilicet

$$x = f + F p, \; y = g + G p, \; z = h + H p$$

vbi litterae F, G, H certas designant constantes ab indole translationis pendentes.

§. 7. Statim autem manifestum est, istas constantes ita comparatas esse debere, vt internallum $i z$ aequale sit internallo $IP = p$, vnde sequitur ista determinatio:

$$i z^2 = F^2 p^2 + G^2 p^2 + H^2 p^2 = p p$$

quam ob rem necesse est vt sit $F^2 + G^2 + H^2 = 1$. Quod si ergo sumamus $F = \sin. \zeta$, fieri debet $G^2 + H^2 = \cos. \zeta^2$; hanc ob rem statuamus

$$G = \cos. \zeta \sin. \eta \text{ et } H = \cos. \zeta \cos. \eta, \text{ ita vt sit}$$

$$F = \sin. \zeta; \; G \cos. \zeta \sin. \eta \text{ et } H = \cos. \zeta \cos. \eta.$$

Hoc ergo modo tres litterae illae F, G, H ad duos tantum angulos ζ et η sunt reductae.

§. 8. Simili modo sumamus nunc punctum z in eo loco, in quem punctum Q ex situ initiali fuerit translatum; at vero punctum Z in punctum Q cadit sumendo $p = 0$ et $r = 0$. Hoc ergo casu ternae coordinatae x, y, z ita pendebunt a sola variabili q, vt facto $q = 0$ iterum fiat $x = f$, $y = g$ et $z = h$; quamobrem, cum aequatio etiam debeat esse pro linea recta, coordinatae talem formam habebunt:

$$x = f + F' q, \; y = g + G' q, \; z = h + H' q$$

vbi ergo ob $i z = q$ etiam esse oportet

$$F' F' + G' G' + H' H' = 1$$

 cui

cui conditioni commode per binos angulos ζ' et η' ita ſatisfiet, vt ſit

$$F' = \text{ſin.}\,\zeta',\ G' = \text{coſ.}\,\zeta'\,\text{ſin.}\,\eta',\ H' = \text{coſ.}\,\zeta'\,\text{coſ.}\,\eta'.$$

§. 9. Sumamus nunc punctum Z in R, quod euenit ſtatuendo $p = 0$ et $q = 0$, vnde ſi iam punctum z exhibeat locum, in quem punctum R erit translatum, pro coordinatis eodem modo quo ante adipiſcemur tales formas:

$$x = f + F'' r,\ y = g + G'' r,\ z = h + H'' r.$$

Et quia eſſe oportet

$$F''F'' + G''G'' + H''H'' = 1$$

per binos nouos angulos ζ'' et η'' ſtatuere poterimus

$$F'' = \text{ſin.}\,\zeta'',\ G'' = \text{coſ.}\,\zeta''\,\text{ſin.}\,\eta''\ \text{et}\ H'' = \text{coſ.}\,\zeta''\,\text{coſ.}\,\eta''.$$

§. 10. Quoniam igitur coordinatarum x, y et z valores nacti ſumus, quos inducere debent tribus caſibus euolutis, vbi trium quantitatum p, q, r duae euaneſcebant, perſpicuum hinc eſt, quomodo coorditae x, y, z a ſingulis quantitatibus p, q, r pendent. Quamobrem, ſi omnes iſtae litterae ſimul in computum ingrediantur, ita vt iis punctum corporis quodcunque Z indicetur, cui in ſitu translato reſpondeat punctum z, coordinatae x, y, z ſequentes habere debebunt valores:

$$\begin{aligned} x &= f + Fp + F'q + F''r \\ y &= g + Gp + G'q + G''r \\ z &= h + Hp + H'q + H''r \end{aligned}$$

has autem nouem litteras vidimus reduci ad ſex angulos ζ, η, ζ' η', ζ'', η''.

§. 11.

§. 11. Sumamus nunc punctum Z in ipso puncto s ita vt sit $r=0$, ac si in situ translato isti puncto respondeat punctum z, posito $r=0$ ternae coordinatae ita se habebunt:

$x=f+Fp+F'q$, $y=g+Gp+G'q$, $z=h+Hp+H'q$.

Vbi necesse est, vt fiat distantia iz distantiae IS aequalis, quae cum sit $\sqrt{pp+qq}$, hinc nascetur ista aequatio:

$$pp+qq=(Fp+F'q)^2+(Gp+G'q)^2+(Hp+H'q)^2$$

et facta euolutione fiet

$$pp+qq=pp(FF+GG+HH)+qq(F'F'+G'G'+H'H') + 2pq(FF'+GG'+HH').$$

Cum igitur sit

$$FF+GG+HH=1 \text{ et } F'F'+G'G'+H'H'=1$$

superest, vt euadat $FF'+GG'+HH'=0$.

§. 12. Eodem modo patebit, si sumamus $q=0$, tum istam proprietatem locum habere debere, vt sit $FF''+GG''+HH''=0$: at si statuamus $p=0$, inde resultabit ista aequatio $F'F''+G'G''+H'H''=0$. Quibus tribus conditionibus cum fuerit satisfactum, tota translatio erit determinata; ac nostrae formulae pro omnibus corporis punctis easdem exhibebunt distantias in situ translato, quas tenuerunt in situ initiali.

§. 13. Substituamus nunc in his aequationibus valores ante inuentos, ac prima

$FF'+GG'+HH'=0$ dabit

$$\sin\zeta\sin.\zeta'+\cos.\zeta\cos.\zeta'\sin.\eta\sin.\eta'+\cos.\zeta\cos.\zeta'\cos.\eta\cos.\eta'=0 \text{ siue}$$

$$\sin.\zeta\sin.\zeta'+\cos.\zeta\cos.\zeta'\cos.(\eta-\eta')=0 \text{ ob } \cos.\eta\cos.\eta'+\sin.\eta\sin.\eta'=\cos.(\eta-\eta')$$

 quae

quae aequatio per $\operatorname{cos}\zeta \operatorname{cos}\zeta'$ diuisa praebet

$$\operatorname{tang.}\zeta \operatorname{tang.}\zeta' = -\operatorname{cos.}(\eta - \eta').$$

Eodem modo binae reliquae aequationes dabunt

$$\operatorname{tang.}\zeta' \operatorname{tang.}\zeta'' = -\operatorname{cos.}(\eta' - \eta'') \text{ et } \operatorname{tang.}\zeta'' \operatorname{tang.}\zeta = -\operatorname{cos.}(\eta'' - \eta).$$

Ex his igitur tribus aequationibus ternos angulos ζ, ζ' et ζ'' determinare licebit, ita vt omnia per ternos angulos η, η', η'' definiri queant.

§. 14. Quod quo facilius fieri possit, multiplicemus has tres aequationes in se inuicem, vt fiat

$$\operatorname{tang.}\zeta^2 \operatorname{tang.}\zeta'^2 \operatorname{tang.}\zeta''^2 = -\operatorname{cos.}(\eta - \eta')\operatorname{cos.}(\eta' - \eta'')\operatorname{cos.}(\eta'' - \eta).$$

Vnde statim patet, nisi productum horum trium cosinuum fuerit negatiuum, casum esse impossibilem; quocirca ante omnia necesse est, vt horum cosinuum vel vnus vel omnes tres sint negatiui. Statuamus igitur breuitatis gr.

$$\operatorname{cos.}(\eta - \eta')\operatorname{cos.}(\eta' - \eta'')\operatorname{cos.}(\eta'' - \eta) = -\Delta\,\Delta,$$

vt nanciscamur $\operatorname{tang.}\zeta \operatorname{tang.}\zeta' \operatorname{tang}\zeta'' = \Delta$, quae aequatio per singulas praecedentes diuisa nobis suppeditat hos valores:

$$\operatorname{tang.}\zeta'' = \frac{-\Delta}{\operatorname{cos.}(\eta - \eta')}; \quad \operatorname{tang.}\zeta = \frac{-\Delta}{\operatorname{cos.}(\eta' - \eta'')}; \quad \operatorname{tang.}\zeta' = \frac{-\Delta}{\operatorname{cos.}(\eta'' - \eta)}$$

hoc igitur modo omnes nouem coefficientes initio assumti F, G, H, F', G', H', F'', G'', H'', per solos ternos angulos η, η', η'' determinantur hoc modo:

$$\begin{aligned}
F &= \operatorname{sin.}\zeta, & G &= \operatorname{cos.}\zeta \operatorname{sin.}\eta, & H &= \operatorname{cos.}\zeta \operatorname{cos.}\eta \\
F' &= \operatorname{sin.}\zeta', & G' &= \operatorname{cos.}\zeta' \operatorname{sin.}\zeta', & H' &= \operatorname{cos.}\zeta' \operatorname{cos.}\eta' \\
F'' &= \operatorname{sin.}\zeta'', & G'' &= \operatorname{cos.}\zeta'' \operatorname{sin.}\eta'', & H'' &= \operatorname{cos.}\zeta'' \operatorname{cos.}\eta''.
\end{aligned}$$

§. 15. Omnes igitur translationes, quibus situs corporis rigidi mutari potest, per sex elementa deter-

determinari possunt. Primo enim ternae coordinatae f, g, h determinant translationem puncti I in i, quae ergo penitus a nostro arbitrio pendent. Deinde, quomodocunque corpus circa hoc punctum i fuerit interea conuersum, eius situs per ternos angulos η, η', η'', penitus determinatur; sumto enim in situ initiali elemento corporis quocunque Z, cuius positio per ternas coordinatas p, q, r, definitur, id in situ translato reperietur in puncto z, cuius positio per istas ternas coordinatas definietur:

$$x = f + \mathrm{F}p + \mathrm{F}'q + \mathrm{F}''r$$
$$y = g + \mathrm{G}p + \mathrm{G}'q + \mathrm{G}''r$$
$$z = h + \mathrm{H}p + \mathrm{H}'q + \mathrm{H}''r.$$

§. 16. Quo autem magis conuincamur, per has formulas omnia quae ad translationem pertinent perfecte determinari, totum negotium etiam sequenti modo absolui potest. Concipiamus in statu initiali praeter punctum Z aliud quodcunque Z', in figura quidem non expressum, cuius locus his coordinatis definiatur p', q', r'. Hoc autem punctum translatum sit in z', cui respondeant coordinatae x', y', z', quarum ergo valores ita exprimentur

$$x' = f + \mathrm{F}p' + \mathrm{F}'q' + \mathrm{F}''r'$$
$$y' = g + \mathrm{G}p' + \mathrm{G}'q' + \mathrm{G}''r'$$
$$z' = h + \mathrm{H}p' + \mathrm{H}'q' + \mathrm{H}''r'.$$

Quibus positis natura corporum rigidorum postulat, vt interuallum in situ translato $z\,z'$ aequale sit interuallo Z Z' in situ initiali, quandoquidem in his corporibus omnia interualla inter bina eorum puncta

cta quaecunque perpetuo eandem quantitatem seruare debent.

§. 17. Iam vero distantiae punctorum Z et Z' in statu initiali quadratum est

$$(p'-p)^2+(q'-q)^2+(r'-r)^2$$

in statu autem translato quadratum distantiae inter puncta z et z' est

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2,$$

quod ergo ex tribus sequentibus quadratis componitur

$$\begin{aligned}&(F(p'-p)+F'(q'-q)+F''(r'-r))^2\\+&(G(p'-p)+G'(q'-q)+G''(r'-r))^2\\+&(H(p'-p)+H'(q'-q)+H''(r'-r))^2\end{aligned}$$

quorum ergo summa aequalis esse debet illi formulae

$$(p'-p)^2+(q'-q)^2+(r'-r)^2.$$

§. 18. Euolutis autem ternis illis quadratis sequens expressio resultabit

$$\begin{aligned}&(p'-p)^2(FF+GG+HH)\\+&(q'-q)^2(F'F'+G'G'+H'H')\\+&(r'-r)^2(F''F''+G''G''+H''H'')\\+&2(p'-p)(q'-q)(FF'+GG'+HH')\\+&2(p'-p)(r'-r)(FF''+GG''+HH'')\\+&2(q'-q)(r'-r)(F'F''+G'G''+H'H'')\end{aligned}$$

quamobrem, vt ista expressio priori

$$(p'-p)^2+(q'-q)^2+(r'-r)^2$$

reddatur aequalis, quomodocunque coordinatae p, q, r,

n, p', q', r', fuerint assumtae sex sequentibus conditionibus satisfieri oportet

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & FF + GG + HH = 1 \\
\text{II.} & F'F' + G'G' + H'H' = 1 \\
\text{III.} & F''F'' + G''G'' + H''H'' = 1 \\
\text{IV.} & FF' + GG' + HH' = 0 \\
\text{V.} & FF'' + GG'' + HH'' = 0 \\
\text{VI.} & F'F'' + G'G'' + H'H'' = 0.
\end{array}$$

§. 19. At vero omnes istas sex conditiones iam in superioribus adimpleuimus, vbi ostendimus, quemadmodum omnes hi nouem coefficientes per ternos angulos η, η', η'' determinari queant. Ex quo eo clarius intelligitur, solutionem nostram quaestionis circa translationem quamcunque corporum rigidorum penitus esse determinatam et adaequatam, ita vt in parte geometrica, quam motus talium corporum determinatio postulat, nihil amplius desiderari possit.

§. 20. Quomodocunque autem translatio corporis fuerit facta, qua punctum corporis I in punctum *i* est translatum; notum est si translatio fuerit infinite parua, tum semper in situ translato dari quaedam recta *iz*, cuius situs parallelus erit ei, quem eadem recta in statu initiali habuit, ita vt, si punctum I quieuisset, ista recta penitus immota mansisset. Euidens autem est, istam rectam repraesentare axem corporis circa quem gyratio fuerit facta, dum corpus in situm translatum peruenit. Quam-

Quamobrem maximi momenti erit inueſtigare, vtrum, ſi translatio fuerit finita, etiam detur talis axis.

§ 21. Manifeſtum autem eſt, vt recta iz etiam nunc parallela ſit rectae IZ, ad hoc requiri tres iſtas conditiones:

$$1^\circ.\ x-f=p,\quad 2^\circ.\ y-g=q,\quad 3^\circ.\ z-h=r$$

vnde naſcuntur hae aequationes:

$$p=Fp+F'q+F''r$$
$$q=Gp+G'q+G''r$$
$$r=Hp+H'q+H''r$$

ex quibus aequationibus litteras p, q, r eliminari oportet. Valores autem ipſius p hinc deducti erunt

$$\frac{F'q+F''r}{1-F},\quad \frac{(1-G')q+G''r}{G},\quad \frac{(1-H'')r-H'q}{H}.$$

Horum valorum primus ſecundo aequatus iſtam dabit rationem inter q et r, ſcilicet

$$\frac{q}{r}=\frac{G''(F-1)-F''G}{GF'-(1-F)(1-G')}$$

ac primus valor tertio aequatus perducit ad hanc relationem:

$$\frac{q}{r}=\frac{(1-F)(1-H'')-F''H}{F'H+H'(1-F)}.$$

Hos igitur duos valores reuera inter ſe aequari neceſſe eſt, ſiquidem talis axis gyrationis datur.

§. 22. Quod ſi autem hos duos valores inter ſe aequales ponamus, perueniemus ad iſtam aequationem:

$$(1-F)F''GH'+(1-F)F'G''H+(1-F)(1-G')F''H+(1-F)(1-H'')F'G$$
$$+(1-F)^{2}G''H'(1-F)^{2}(1-G')(1-H'')=0$$

cuius

cuius aequationis omnia membra factore communi gaudent $(1-F)$; hoc ergo per diuisionem sublato remanebit ista aequatio:

$$F''GH'+F'G''H+(1-G')F''H+(1-H'')F'G+(1-F)G''H'$$
$$-(1-F)(1-G')(1-H'')=0$$

quae singulis membris euolutis dat hanc aequationem

$$\begin{array}{llll} 0 = -1 & +F & -FG' & +FG'H'' \\ & +G' & -FH'' & -FG''H' \\ & +H'' & +F'G & -F'GH'' \\ & & -G'H'' & -F''G'H \\ & & +G''H' & \\ & & +F'H. & \end{array}$$

Hic autem non liquet, quomodo ista expressio ad nihilum redigatur; ac nimis taediosum foret loco litterarum F, G, H, eorum valores penitus euolutos substituere.

§. 23. Missa igitur hac inuestigatione, quoniam pro translatione quacunque formulas dedimus, quarum ope ex data cuiusque puncti positione in statu initiali eiusdem positio in statu translato assignari potest, scopo quem nobis proposueramus plene satisfecimus, ita vt in hac parte nihil amplius desiderari queat, cum tota haec inuestigatio in determinatione 9 coefficientium $F, G, H, F', G', H', F'', G'', H''$ contineatur.

Additamentum.

§. 24. Cum formulae, quas supra pro quouis situ translato dedimus, maxime sint generales, et omnes translationes in se complectantur, mirum videri debet, quod ex illis haud pateat, vtrum in omni situ translato talis detur recta iz, quae eandem directionem teneat, quam in situ initiali habuit. Aequatio enim §. 22. inuenta tantopere est implicata, vt nimis molestum foret, loco singularum litterarum valores quos ipsis assignauimus substituere. Interim tamen aliunde certum est, quomodocunque corpus rigidum ex vno situ in alium transferatur, semper dari eiusmodi rectam iz, cuius directio nullam mutationem patiatur. Ad hoc enim demonstrandum concipiamus corpori rigido, cuiuscunque fuerit figurae, sphaeram circumscribi cum ipso connexam simulque mobilem, quae centrum habeat in puncto I, quo facilius istam inuestigationem ad doctrinam sphaericam traducere liceat.

Theorema.

Quomodocunque sphaera circa centrum suum conuertatur, semper assignari potest diameter, cuius directio in situ translato conueniat cum situ initiali.

Demonstratio.

Tab. II. Fig. 2. §. 25. Referat circulus A,B,C circulum sphaerae maximum quemcunque, in statu initiali, qui facta translatione peruenerit in situm a, b, c, ita vt puncta A, B, C ranslata sint in puncta a, b, c; punctum autem A sit simul intersectio horum duorum circulorum. Quo posito demonstrandum est, semper dari punctum O, quod pari modo referetur tam ad

circu-

circulum A, B, C quam ad circulum a, b, c. Ad hoc igitur necesse est, vt primo distantiae O A et O a sint inter se aequales; deinde vero, vt etiam arcus O A et O a ad illos duos circulos aequaliter sint inclinati, siue vt sit angulus O a b = angulo O A B: erunt ergo etiam complementa ad duos rectos, hoc est anguli O a A et O A α inter se aequales. Quoniam autem arcus O a et O A sunt aequales, erit quoque angulus O a A = angulo O A a, ideoque O A a = O A α; vnde patet, si angulus a A α bisecetur arcu O A, tum punctum quaesitum O alicubi in isto arcu A O fore situm; quod igitur reperietur si arcus a O ita ducatur, vt angulus A a O aequalis euadat angulo O A a. Intersectio enim horum arcuum dabit punctum O, per quod si ducatur diameter Sphaerae, eius positio in situ translato etiamnunc eadem erit, quae fuerat in situ initiali.

§. 26. Ad hoc punctum O facilius definiendum, bisecari potest arcus A a in puncto M, vbi constituatur arcus M O ad A a normalis; tum vero ducatur arcus A O, ita vt angulum a A α bisecet; atque intersectio horum arcuum O monstrabit punctum quaesitum. Hic obseruatur, si arcus a α aequalis capiatur arcui a A, fore α punctum Sphaerae, quod facta translatione peruenerit in punctum A, quamobrem iste angulus a A α bisecari debet, non vero eius deinceps positus a A B.

§. 27. Vulgo quidem punctum I (fig. 1.) ad quod positio corporis initialis refertur, sumi solet in Tab. II. Fig. 1.

in eius centro grauitatis. Verum ex demonſtratione data apparet, veritatem theorematis etiam ſubſiſtere, quodcunque aliud punctum pro centro Sphaerae fuerit aſſumtum. Quamobrem, ſi in corpore rigido loco I accipiatur punctum quodcunque, per id ſemper duci poterit linea recta, cuius poſitio in ſitu translato non erit immutata; quin etiam nihil impedit, quo minus iſtud punctum I adeo extra corpus accipiatur. Quamobrem cauendum eſt, ne iſta inſignis proprietas tanquam centro grauitatis propria ſpectetur: ideo enim tantum punctum illud I in ipſo centro grauitatis corporis conſtitui ſolet, quo formulae analyticae, quibus motus talium corporum definitur, fiunt ſimpliciores.

§. 28. Cum igitur ſolidiſſimis rationibus ſit euictum, in omni ſitu translato ſemper dari eiusmodi lineam rectam $i z$, cuius directio non diſcrepet a directione, quam eadem recta I Z in ſitu initiali tenuit, etiam certi eſſe poſſumus, aequationem §. 22. datam ſemper locum eſſe habituram, poſtquam ſcilicet loco omnium litterarum valores aſſignati fuerint ſubſtituti; hoc enim facto neceſſario euenire debet, vt omnes plane termini ſponte ſe mutuo tollant, etiamſi hoc ex ſex illis conditionibus principalibus, quibus ſatisfieri oportuit neutiquam appareat. Quamobrem iſta eximia proprietas, cuius veritas geometrice tam facile eſt oſtenſa ratione formularum analyticarum pro maxime abſcondita eſt habenda; atque ob hanc ipſam rationem ex

ea

ea pulcherrima incrementa per totam mechanicam merito expectare possumus.

§. 29. Interim tamen formulas, quas pro illis litteris maiusculis supra inuenimus, diligentius euoluamus, quo inde forsitan facilius perspici queat, quemadmodum aequatio illa §. 22. data adimpleatur. Introductis autem sex angulis ζ, ζ', ζ''; η, η', η'' per quos illas §. 14. expressimus, ternos priores per posteriores ita determinauimus, vt posito

$-\cos.(\eta-\eta').\cos.(\eta'-\eta'').\cos.(\eta''-\eta) = \Delta\Delta$ esset

$\text{tang.}\,\zeta'' = \frac{-\Delta}{\cos.(\eta-\eta')}$; $\text{tang.}\,\zeta = \frac{-\Delta}{\cos.(\eta'-\eta'')}$; $\text{tang.}\,\zeta' = \frac{-\Delta}{\cos.(\eta''-\eta)}$

vnde ergo tam sinus quam cosinus illorum angulorum deduci oportet.

§. 30. Quod quo facilius fieri possit, loco angulorum η, η' et η'' introducamus alios angulos $\theta, \theta', \theta''$, ita vt sit $\eta - \eta' = \theta''$; $\eta' - \eta'' = \theta$ et $\eta'' - \eta = \theta'$, vnde patet fore $\theta + \theta' + \theta'' = 0$, ita vt hi tres noui anguli tantum duobus aequiualeant; ideoque hinc ex angulis η, η' et η'' vnus manebit indefinitus, qui si fuerit η erit $\eta' = \eta - \theta''$ et $\eta'' = \eta + \theta'$. His igitur angulis introductis erit $\Delta\Delta = -\cos.\,\theta.\cos.\,\theta'\cos.\,\theta''$, hocque valore adhibito habebimus

$$\text{tang.}\,\zeta'' = -\sqrt{-\frac{\cos.\,\theta\cos.\,\theta'}{\cos.\,\theta''}},$$

$$\text{tang.}\,\zeta = -\sqrt{-\frac{\cos.\,\theta'\cos.\,\theta''}{\cos.\,\theta}},$$

$$\text{tang.}\,\zeta' = -\sqrt{-\frac{\cos.\,\theta''\cos.\,\theta}{\cos.\,\theta'}}.$$

§. 31. Ex his formulis pro tangentibus inuentis colligamus formulas pro sinibus et cosinibus, ac pro primo quidem erit

$$\text{fin.}\,\zeta'' = -\frac{\sqrt{-\text{cof.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta'}}{\sqrt{\text{cof.}\,\theta'' - \text{cof.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta'}} \text{ et } \text{cof.}\,\zeta'' = \frac{\sqrt{\text{cof.}\,\theta''}}{\sqrt{\text{cof.}\,\theta'' - \text{cof.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta'}}.$$

Cum autem fit $\theta'' = -\theta - \theta'$ erit

$$\text{cof.}\,\theta'' = \text{cof.}\,(\theta + \theta') = \text{cof.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta' - \text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\theta'$$

quo valore fubftituto fiet

$$\text{fin.}\,\zeta'' = -\frac{\sqrt{-\text{cof.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta'}}{\sqrt{-\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\theta'}} = -\sqrt{\frac{\text{cof.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta'}{\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\theta'}} = -\sqrt{\text{cot.}\,\theta\,\text{cot.}\,\theta'}$$

fimilique modo

$$\text{cof.}\,\zeta'' = \frac{\sqrt{\text{cof.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta' - \text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\theta'}}{\sqrt{-\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\theta'}} = \sqrt{\frac{-\text{cof.}\,\theta\,\text{cof.}\,\theta'}{\text{fin.}\,\theta\,\text{fin.}\,\theta'} + 1} = \sqrt{(1 - \text{cot.}\,\theta\,\text{cot.}\,\theta')}$$

Atque hinc iam perfpicuum eft, pro binis reliquis angulis fore

$$\text{fin.}\,\zeta = -\sqrt{\text{cot.}\,\theta'\,\text{cot.}\,\theta''} \text{ et } \text{cof.}\,\zeta = +\sqrt{1 - \text{cot.}\,\theta'\,\text{cot.}\,\theta''}$$

$$\text{fin.}\,\zeta' = -\sqrt{\text{cot.}\,\theta''\,\text{cot.}\,\theta} \text{ et } \text{cof.}\,\zeta' = +\sqrt{1 - \text{cot.}\,\theta''\,\text{cot.}\,\theta}$$

$$\text{fin.}\,\zeta'' = -\sqrt{\text{cot}\,\theta\,\text{cot.}\,\theta'} \text{ et } \text{cof.}\,\zeta'' = +\sqrt{1 - \text{cot.}\,\theta\,\text{cot.}\,\theta''}.$$

§. 32. Quod fi nunc ifti valores euoluti fubftituantur loco angulorum ζ, ζ' et ζ'', formulae pro nouem litteris F, G, H, F', G', H' etc. fupra inventae fequenti modo exprimentur, poftquam fcilicet breuitatis gratia pofuerimus

$$\text{cot.}\,\theta = t\,;\ \text{cot.}\,\theta' = t' \text{ et } \text{cot.}\,\theta'' = t''$$

$$F = -\sqrt{t't''};\ G = \text{fin.}\,\eta\,\sqrt{1-t't''};\ H = \text{cof.}\,\eta\,\sqrt{1-t't''}$$

$$F' = -\sqrt{t''t};\ G' = \text{fin.}\,\eta'\,\sqrt{1-t''t};\ H' = \text{cof.}\,\eta'\,\sqrt{1-t''t}$$

$$F'' = -\sqrt{tt'};\ G'' = \text{fin.}\,\eta''\,\sqrt{1-tt'};\ H'' = \text{cof.}\,\eta''\,\sqrt{1-tt'}.$$

§. 33. Verum etiamfi hos valores in aequatione §. 22. fubftituamus, nullo tamen modo perfpicitur,

citur, quomodo singula eius membra se mutuo destruere queant. Quamobrem necesse erit, insuper eius conditionis rationem habere, quod sit $\theta+\theta'+\theta''=0$; vnde inter litteras t, t', t'' ista relatio nascitur, vt sit $tt'+t't''+tt''=1$, siue vt summa productorum ex binis vnitate aequatur. Praeterea vero etiam ad eam conditonem est attendenda, qua erat $\eta'=\eta-\theta''$ et $\eta''=\eta+\theta'$, atque his conditionibus rite obseruatis et per calculum euolutis nullum dubium superesse potest, quin ista aequatio adimpleatur. At vero nemo facile stupendum hunc laborem in se suscipere volet; quamobrem egregia ista proprietas omnium corporum rigidorum multo magis ardua est censenda, et Geometris pulcherrimam occasionem praebere potest, vires suas in ista proprietate penitus enucleanda exercendi.

NOVA